

En la etapa preliminar del análisis vibracional de ejes propulsores, se debe aproximar una solución por un método que nos conduzca a un dimensionamiento confiable de la línea de ejes.

Se ha tomado como ejemplo líneas propulsoras de múltiples ejes y múltiples descansos, muy común en yates y pesqueros.

Buscando generalizar una aproximación a líneas propulsoras de  $n$  tramos de ejes y  $m$  descansos, se ha aplicado la metodología disponible propuesta por los investigadores Dunkerley, Woytowich [5] y Raleigh. Se ha comparado los resultados obtenidos con el método de Elementos Finitos, encontrándose variaciones sustanciales sobre todo cuando se incrementa el número de descansos y tramos de ejes.

Vista esta discrepancia, se ha procedido a estudiar la divergencia de los resultados, encontrándose que al aplicar el método energético propuesto por Raleigh a un eje, en condición de rotación quasi estática y generalizando esta aplicación a los  $n$  tramos de ejes, se obtiene un comportamiento simplificado que aproxima en buen grado los resultados encontrados mediante el método de Elementos Finitos.

La implementación de esta formulación en una hoja electrónica permite:

- Dimensionar el diámetro de ejes propulsores, optimizando sus respectivas secciones
- optimizar la carga en los descansos
- Estimar la frecuencia fundamental rotacional
- Analizar el acoplamiento línea propulsora con el eje de salida del reductor.
- Optimizar la posición de bridas de acople y posición de hélice.

## Introducción

En la etapa preliminar de diseño de una línea de ejes propulsores, es necesario estimar la posición de los descansos, dimensionamiento de ejes y definir el rango de trabajo permisible, basado en la frecuencia natural del sistema.

Se ha revisado la metodología desarrollada cuando el sistema de propulsión tiene  $n$  tramos de ejes y  $m$  descansos.

La metodología más confiable para calcular los parámetros mencionados hasta ahora, ha sido a través del método de Elementos Finitos -MEF. El método MEF, no permite niveles de optimización y análisis de sensibilidad necesarios en la etapa preliminar de diseño, razón por la cual se ha investigado otras metodologías que permitan implementar el cálculo analítico y llevar confiablemente a estimar los parámetros cercanos a los valores óptimos.

Dentro de las metodologías actualmente en uso, se destaca entre otras el cálculo de la frecuencia natural propuesto por Raleigh. Este método es una aplicación de la Ley de conservación de la energía. Mediante esta formulación, la deformación estática de un tramo de eje puede ser aproximada por un conjunto de segmentos de masas, soportadas por resortes lineales. En el abordaje propuesto por Raleigh, los descansos son considerados rígidos. En este método, se define el comportamiento de cada tramo segmento de eje, como también la formulación para el caso de masas concentradas, tal como puede ser el caso de una hélice o una brida de acople.

Adicionalmente se ha revisado la metodología propuesta para dos tramos de ejes. Esta metodología ha sido propuesta por Woytowich, Dunkerley y Panagopulos.

Vista las limitaciones analíticas actuales se propone en consideración la siguiente, metodología que busca generalizar la aproximación de CÁLCULO DE FRECUENCIA NATURAL ROTACIONAL – CFNR, para sistemas propulsores de  $n$  tramos de ejes y  $m$  descansos

## Aproximación a una línea de ejes

El comportamiento de una línea de ejes soportada por descansos rígidos, rotando a una velocidad  $w$  [rad/seg.], tiene una forma sinusoidal, esto es, una flexión alternada entre descansos, siendo positiva la deformación para un tramo y negativa la deformación para el siguiente tramo.

Este comportamiento sinusoidal manifestado al rotar el eje es causado por la fuerza centrífuga.

Siendo  $F_c$  la fuerza centrífuga de un segmento de eje, la formulación se define por:

$$F_c = A c m = V^2 m / r = w^2 r (W/g) \quad (1)$$

$$r = r_0 + (\Delta r) = p r_0 \quad (2)$$

Siendo

$m = W/g$  = masa del segmento de eje

$r$  = radio de rotación del segmento de eje

$r_0$  = deformación estática del segmento de eje, por efecto de la carga alternada por tramo

$(\Delta r)$  = la deformación dinámica por efecto de la fuerza centrífuga

(\*) Gerente de TECNAVIN S.A., *proyectos navales*.  
www.tecnavin.com

# UNA APROXIMACION AL ANALISIS ROTACIONAL DE EJES

Por Franklin J. Domínguez (\*).

Pag 2/6

Considerando que cada segmento de eje es soportado por un resorte lineal  $K$ , el efecto de la fuerza centrífuga en el segmento de eje será:

$$F_c = K (\Delta r) \quad (3)$$

$$(\Delta r) = F_c / K \quad (4)$$

$$(\Delta r) = w^2 r (W/g) / K \quad (5)$$

$$(\Delta r) = w^2 p r_0 (W/g) / K \quad (6)$$

si  $W = K r_0$ , re emplazando en (6)

$$(\Delta r) = w^2 p r_0^2 / g \quad (7)$$

haciendo que

$$p' = w^2 p / g \quad (8)$$

$$(\Delta r) = p' r_0^2 \quad (9)$$

esto nos indica que la deformación dinámica por efecto de la fuerza centrífuga es proporcional al cuadrado de la deformación estática.

La energía potencial desarrollada por el segmento de eje será:

$$EP = F_c \cdot p r_0 = K (\Delta r) p r_0 \quad (10)$$

$$EP = K (p' r_0^2) p r_0 = K (p' r_0^3) p \quad (11)$$

La energía cinética desarrollada por el segmento de eje será:

$$EC = w^2 r (W/g) (\Delta r) \quad (12)$$

$$EC = w^2 p r_0 (W/g) (\Delta r) \quad (13)$$

$$EC = w^2 p r_0 (W/g) (p' r_0^2) \quad (14)$$

$$EC = w^2 p (W/g) (p' r_0^3) \quad (15)$$

$$EC = w^2 p (K/g) (p' r_0^4) \quad (16)$$

## Desarrollo del procedimiento de CFNR

El procedimiento CFNR se basa en los siguientes términos referenciales:

1. línea de ejes de  $n$  tramos, de material homogéneo y elástico linealmente
2. línea de ejes soportados por  $m$  descansos, rígidos a la estructura
3. por la condición del eje: homogéneo y elástico linealmente, se aproxima que cada segmento de eje tendrá un mismo valor de  $p'$  y de  $p$ .
4. una vez configurada la línea de ejes en sus  $n$  tramos, se definirá la carga alternada por tramos. Esto es: un tramo será cargado en dirección hacia abajo y el siguiente tramo será cargado hacia arriba.
5. de este resultado se obtendrá por tramo:

a. deformación de cada segmento de eje ( $r_0$ )

b. deformación promedio por cada tramo de eje, promedio ( $r_0$ )

c. la constante elástica por cada tramo de eje ( $K$ )

6. la línea de ejes en su conjunto una vez deformada, adquiere una energía potencial, tal que su máxima deformación se obtendrá por la igualación con su energía cinética.

7. la línea de eje de  $n$  tramos esta rotando a la misma velocidad  $w$  (rad / seg.)

Basado en este principio (6.-) y de acuerdo con las fórmulas indicadas en (11) y (16), se tiene:

$$EP = EC \quad (17)$$

$$\Sigma K (p' r_0^3) p = \Sigma w^2 p (K/g) (p' r_0^4) \quad (18)$$

o lo que es lo mismo

$$\Sigma K r_0^3 = \Sigma w^2 (K/g) r_0^4 \quad (19)$$

de donde la frecuencia fundamental rotacional será:

$$w^2 = g [ \Sigma K r_0^3 / (\Sigma K r_0^4) ] \quad (20)$$

Las unidades de  $K$ ,  $g$  y  $|r_0|$ , deben ser consistentes.

## Metodología para la aplicación del CFNR

El objetivo del análisis rotacional es básicamente estimar las cargas en los descansos y la frecuencia fundamental, tal que en la etapa de diseño definitivo, los descansos no estén sobrecargados y la línea de propulsión tenga su frecuencia fundamental fuera del rango de trabajo al menos con una tolerancia del 25%.

Siendo así, para realizar este análisis se debe:

1. reunir las formulaciones básicas de cálculo para :
  - a. dimensionamiento del diámetro de los ejes
  - b. tolerancia preliminar de colgamiento de hélice
  - c. ubicación preliminar de bancadas o apoyos
  - d. ubicación preliminar de bridas de acoplamiento de ejes
  - e. dimensionamiento preliminar de eje de salida del reductor y piñón

# UNA APROXIMACION AL ANALISIS ROTACIONAL DE EJES

Por Franklin J. Domínguez (\*).

Pag 3/6

- f. cálculo de la deformación estática de la línea de ejes
  - g. cálculo de la deformación quasi estática de la línea de ejes ( esto es: límite cuando el eje se acerca a la velocidad de rotación  $w = 0$ )
  - h. cálculo de la frecuencia fundamental
  - i. cálculo de las reacciones en los descansos
  - j. cálculo de la sobre carga o presión en los descansos
2. todas las formulaciones antes indicadas, se han organizado en una hoja electrónica manteniendo la vinculación entre celdas, tal que al final, confiablemente se aplique la herramienta SOLVER. Esto permite encontrar los parámetros óptimos requeridos en el análisis rotacional.

En los apéndices se resume las principales formulaciones indicadas en Anexo 1.

## Ejemplo de aplicación de CFNR.

Estimar la frecuencia rotacional para una línea de propulsión de las siguientes características:

Diámetro de hélice	45.0 pl
Peso de hélice en seco	264.0 lb.
Peso de hélice en agua (+25%)	330.0 lb.
Número de aspas	4
Diámetro de eje cola	3.5 pl
Diámetro de eje de salida en reductor	2.697 pl

## Distribución de bancadas en el eje:

- hélice en voladizo 9.803 pl
- distancia entre bancadas
  - N° 1 y N° 2 60.63 pl
  - N° 2 y N° 3 77.87 pl
  - N° 3 y N° 4 96.90 pl
  - N° 4 y N° 5 59.64 pl
  - N° 5 y N° 6 12.86 pl

## Nota:

Bancadas N° 1: arbotante cercano a la hélice  
Bancadas N° 2: arbotante intermedio  
Bancadas N° 3: bocín de popa, salida del casco  
Bancadas N° 4: bocín del empacador  
Bancadas N° 5: cojinete de empuje del reductor, sector de popa, eje de salida  
Bancadas N° 6: cojinete del reductor, sector de proa, eje de salida

## Listado de pesos de brida y piñones:

Distancia en pl. desde la bancada	Peso Lb.	elemento
N° 5, 11.91 pl	312.64	brida de eje
N° 6, 3.86 pl	42.83	piñón de salida

Material del eje AQUAMET 19  
Módulo de Elasticidad  $2.8 E +07 \text{ Lb./pl}^2$   
Densidad de eje  $0.286 \text{ Lb./pl}^3$

Potencia propulsora 385 HP  
RPM motor 1800  
Ratio 3:1  
RPM hélice 600

## Resultados

### PRIMERA PARTE

Para este ejemplo se ha calculado la frecuencia rotacional crítica en [cpm], por los siguientes métodos:

1. Woytowich (promedio)	1068.3
2. Panagopoulos	1374.8
3. Raleigh	1890.3
4. CFNR	1787.3
5. MEF	1790.4

## Nota:

la frecuencia rotacional crítica es calculada multiplicando la frecuencia fundamental de la línea, por el ratio del reductor y dividido para el número de aspas.

### SEGUNDA PARTE

Como segunda parte del cálculo, se ha estimado tanto, las reacciones en las bancadas, momentos de empotramientos como la deformación cada 10% del segmento del eje.

Resumen de estas cálculos pueden verse en el Anexo 2.

En base a estos resultados se obtiene que las presiones por longitud unitaria en las bancadas serán:

# UNA APROXIMACION AL ANALISIS ROTACIONAL DE EJES

Por Franklin J. Domínguez (\*).

Pag 4/6

Banca- da N°	Reacci- ón Lb.	Longi- tud unita- ria pl.	Diá- me- tro pl.	Presi- ón máx. Lb/pl <sup>2</sup>
1a	4.89E+02	1.	3.5	139.7
2a	1.21E+02	1.	3.5	34.6
3a	2.59E+02	1.	3.5	74.0
4a	2.86E+02	1.	3.5	81.7

Si se usa bancada de bocín sintético, dureza entre 60 a 70 Shore D, la máxima presión recomendada por el ABS es 800 Lb./pl<sup>2</sup>.

El porcentaje de deformación estática por tramos, es como sigue:

Banca- da N°	deforma- ción Est. pl.	Longi- tud pl.	% defor- mación
1-2	1.875E-03	60.63	3.09E-03
2-3	1.900E-03	77.87	2.44E-03
3-4	3.361E-03	96.90	3.47E-03
4-5	1.711E-03	59.64	2.86E-03
5-6	2.248E-04	12.86	1.74E-03

El porcentaje de deformación Quasi-estática por tramos, es como sigue:

Banca- da N°	deforma- ción Q. Est. pl.	Longi- tud pl.	% defor- mación
1-2	6.136E-03	60.63	1.01E-02
2-3	7.306E-03	77.87	9.38E-03
3-4	1.034E-03	96.90	1.06E0-03
4-5	4.315E-03	59.64	7.23E-03
5-6	4.198E-04	12.86	3.26E-03

Siendo la deformación máxima de 1.01E-02% en el tramo N° 1-2.

## Conclusiones

- La aplicación del método de Tres Momentos para vigas continua, ha permitido estimar
  - las deformaciones de la viga en condición quasi estática (límite cuando  $w = 0$ )
  - los momentos en las bancadas
  - las reacciones en cada bancada
- con estos parámetros, se ha evaluado la frecuencia crítica rotacional, tanto por

el método propuesto por Raleigh como por el método indicado CFNR, encontrándose que con relación a los resultados calculados por el MEF, los porcentajes de variación son:

- M. Raleigh +5.58%
- M. CFNR -0.17%

- El manejo de la información en hoja electrónica, ha permitido ajustar la carga sobre las bancadas, como también verificar el porcentaje de deformación / longitud de tramo con el que estaría operando la línea propulsora.
- Aun cuando hay varios textos que recomiendan % de deformación límites por tramo de eje, se recomienda analizar cada caso en dependencia de la frecuencia rotacional crítica para la línea propulsora en consideración.

## Apéndices

### ANEXO 1 VIGAS CONTINUAS: Método TRES MOMENTOS

Para la aplicación del método de TRES MOMENTOS, se ha realizado las siguientes consideraciones:

- el eje propulsor es continuo o unido mediante bridas de acople.
- el eje o el conjunto de ejes puede rotar libremente.
- el eje o el conjunto de ejes tienen el mismo módulo de elasticidad
- el eje o el conjunto de ejes, esta apoyado en bancadas, rígidas a la estructura de la nave.
- la hélice se la considera en voladizo, en el extremo del eje propulsor.
- La tuerca o protuberancia de eje fuera de la hélice, será considerada en su peso equivalente y adicionada al peso del propulsor, a la misma distancia de la hélice y la bancada.
- el eje o el conjunto de ejes pueden tener diferentes diámetros, no obstante no está permitido variación de diámetro de ejes entre bancadas.
- La brida de acople de los ejes o los piñones instalados en el eje de salida del reductor, son considerados como cargas puntuales

# UNA APROXIMACION AL ANALISIS ROTACIONAL DE EJES

Por Franklin J. Domínguez (\*).

Pag 5/6

El método de TRES MOMENTOS, en este caso de aplica entre dos tramos de ejes, tal que cada par de tramos este constituido por tres bancadas consecutivas.

Un resumen de las formulaciones de vigas continuas se da a continuación

## 1.-Formula general del Método Tres Momentos

$$\left(\frac{M_1 L_1}{I_1}\right) + 2M_2 \left(\frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2}\right) + \left(M_3 \frac{L_2}{I_2}\right) + \frac{6A_1 \bar{a}_1}{I_1 L_1} + \frac{6A_2 \bar{b}_2}{I_2 L_2} = 6E \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2}\right)$$

donde

1.  $h_i$  = diferencia de altura con relación a la bancada intermedia.
2.  $L_i$  = longitud de tramo de eje entre bancadas consecutivas
3.  $I_i$  = Inercia radial de cada tramo de eje consecutivo
4.  $M_i$  = momento flectante en la bancada
5.  $E$  = módulo de elasticidad del eje
6. el término relativo a la carga distribuida o puntual, en el tramo de eje en consideración es como sigue:

### CARGA DISTRIBUIDA $q$ EN TRAMO 1

$$\frac{6A_1 \bar{a}_1}{I_1 L_1} = \frac{qL_1^3}{I_1 4}$$

### CARGA DISTRIBUIDA $q$ EN TRAMO 2

$$\frac{6A_2 \bar{b}_2}{I_2 L_2} = \frac{qL_2^3}{I_2 4}$$

### CARGA PUNTUAL $P_1$ EN TRAMO 1

$$\frac{6A_1 \bar{a}_1}{I_1 L_1} = \frac{P_1 a_1 (L_1^2 - a_1^2)}{I_1 L_1}$$

siendo

$a_1$  = distancia desde la bancada izquierda, tramo 1 a la carga puntual  $P_1$

### CARGA PUNTUAL $P_2$ EN TRAMO 2

$$\frac{6A_2 \bar{b}_2}{I_2 L_2} = \frac{P_2 b_2 (L_2^2 - b_2^2)}{I_2 L_2}$$

siendo

$b_2$  = distancia desde la bancada derecha, tramo 2 a la carga puntual  $P_2$

## 2.-Formula para calcular las reacciones en las bancadas

La fórmula para las reacciones es como sigue:

$$R_i = RI + RM$$

Donde

$R_i$  = reacción en la bancada  $i$

$RI$  = reacción isostática por efecto de la carga

$RM$  = reacción debida a los momentos en las bancadas

$M_M$  = momento en la bancada mayor

$M_m$  = momento en la bancada menor

$L$  = longitud del tramo de eje en consideración.

$$RM = \frac{M_M - M_m}{L}$$

## 3.-Formula para calcular las flechas o deformaciones entre bancadas.

La metodología para calcular las deformaciones entre dos bancadas consecutivas, se basa en la misma fórmula general indicada en Anexo 1, 1.-

En este caso, los momentos  $M_1$  y  $M_3$ , son conocidos. El momento  $M_2$  debe ser estimado en base a la carga en el sub tramo de eje en consideración, quedando como incógnita  $h_i$ , diferencia de nivel de la bancada 3, con relación a las bancadas 1 y 2.

## Bibliografía

1. Harrington Roy L., MARINE ENGINEERING, CAP XI, SNAME
2. Rules for Building and Classing Steel Vessels, AMERICAN BUREAU OF SHIPPING, 2004
3. Singer Ferdinand L., RESISTENCIA DE MATERIALES, CAP VII.
4. Thompson William T., THEORY OF VIBRATION, CAP VII, PRENTICE-HALL, INC.
5. Woytowich Richard, CALCULATION OF PROPELLER-EXCITED WHIRLING CRITICAL SPEEDS, SNAME, MT, DEC 1979

# UNA APROXIMACION AL ANALISIS ROTACIONAL DE EJES

Por Franklin J. Domínguez (\*).

Pag 6/6

## ANEXO 2

### RESUMEN DE MOMENTOS, REACCION Y DEFORMACIONES

	eje tramo 0	eje tramo 1a	eje tramo 2a	eje tramo 3a	eje tramo 4a	eje tramo 5a	eje tramo 5b
<b>MOMENTO</b>	0.000E+00	-3.371E+03	-4.197E+02	-2.022E+03	-2.178E+03	-1.785E+03	0.000E+00
<b>REACCION</b>	<b>0.000E+00</b>	<b>4.895E+02</b>	<b>1.213E+02</b>	<b>2.594E+02</b>	<b>2.860E+02</b>	<b>4.876E+02</b>	<b>-9.830E+01</b>
<b>FLECHA 100%</b>	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	
<b>FLECHA 90%</b>	-2.251E-04	4.677E-04	-1.069E-04	-4.618E-04	-6.861E-04	5.710E-05	
<b>FLECHA 80%</b>	-4.572E-04	8.875E-04	-5.447E-04	-1.389E-03	-1.356E-03	1.113E-04	
<b>FLECHA 70%</b>	-6.977E-04	1.270E-03	-1.094E-03	-2.362E-03	-1.754E-03	1.596E-04	
<b>FLECHA 60%</b>	-9.482E-04	1.608E-03	-1.586E-03	-3.081E-03	-1.858E-03	1.988E-04	
<b>FLECHA 50%</b>	-1.210E-03	1.875E-03	-1.900E-03	-3.361E-03	-1.711E-03	2.248E-04	
<b>FLECHA 40%</b>	-1.485E-03	2.029E-03	-1.963E-03	-3.138E-03	-1.377E-03	2.331E-04	
<b>FLECHA 30%</b>	-1.775E-03	2.007E-03	-1.754E-03	-2.462E-03	-9.347E-04	2.194E-04	
<b>FLECHA 20%</b>	-2.080E-03	1.729E-03	-1.298E-03	-1.502E-03	-4.798E-04	1.790E-04	
<b>FLECHA 10%</b>	-2.403E-03	1.099E-03	-6.723E-04	-5.471E-04	-1.251E-04	1.074E-04	
<b>FLECHA 0%</b>	-2.745E-03	1.376E-08	-6.416E-09	-1.787E-09	3.704E-10	1.269E-09	

#### UNIDADES:

MOMENTO

REACCION

FLECHA

=Libra - pulgada

=Libra

=pulgada

#### Nota:

El porcentaje indicado en la flecha es la deformación en pulgada correspondiente a cada 10 % de la longitud del segmento de eje en consideración.